Analiza matematyczna
Lista 2 (ciągłość funkcji)

Zad 1. Na podstawie definicji Cauchy'ego wykazać ciągłość funkcji:

a) $f(x) = 3x + 5$, *b)* $f(x) = -2x + 1$, *c)* $f(x) = 7x$, *d)* $f(x) = \sin x$.

Zad 2. Zbadać ciągłość i sporządzić wykresy następujących funkcji

a) $f(x) = [x]$, *b)* $f(x) = x - [x]$, *c)* $f(x) = \operatorname{sgn} x$, *d)* $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$,

e) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, *f)* $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

Zad 3. Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji (jeżeli istnieją) oraz sporządzić wykresy funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \geq 0, \\ 2x+1, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x^2+1, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (1, +\infty), \\ x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 1], \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ x, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ (x-1)^2, & \text{gdy } x \in [0, 2], \\ 4-x, & \text{gdy } x \in (2, +\infty), \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{gdy } -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1, & \text{gdy } 0 < x \leq 1, \\ \log x, & \text{gdy } 1 < x \leq 2, \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ -1, & \text{gdy } x = 0, \\ x^2-1, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \end{cases}$ *h)* $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & \text{gdy } x \in (-\infty, -1), \\ x^2+2x+2, & \text{gdy } x \in [-1, +\infty), \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$ *j)* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x \leq 0, \\ e^x, & \text{gdy } x > 0, \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}, \\ 1, & \text{gdy } x = 2, \\ -1, & \text{gdy } x = 3, \end{cases}$ *l)* $f(x) = \begin{cases} -x^2-4x-4, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 2x-4, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$

Zad 4. Funkcja $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ nie jest określona przy $x = 1$. Jaka powinna być wartość $f(1)$, żeby uzupełniona o tę wartość funkcja była ciągła w punkcie $x = 1$?

Zad 5. Dla jakiej wartości $a \in \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych:

a) $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0], \\ -x+1, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{gdy } x \in [1, +\infty), \\ 2(x-a), & \text{gdy } x \in (-\infty, 1), \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x + a, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \\ -x^2 - x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0], \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} 5^{1-x}, & \text{gdy } x \leq 0, \\ a, & \text{gdy } x > 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{a^2 \operatorname{arctg} 2x}{6x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 3, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x-\pi}, & \text{gdy } x \neq \pi, \\ x, & \text{gdy } x = \pi. \end{cases}$

Zad 6. Udowodnić, że każde równanie stopnia n nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, tzn. równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zad 7. Zbadać jednostajną ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2$, $|x| \leq M = \text{const}$, b) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \in (-1, 0)$, f) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.